

République Algérienne Démocratique Et Populaire
Ministère De L'enseignement Supérieur Et De La Recherche Scientifique
Université Mohamed Boudiaf De M'sila

Faculté Des Mathématiques et de l'Informatique
Département De Mathématiques

MÉMOIRE
EN VUE DE L'OBTENTION DU DIPLÔME DE MASTER

Domaine : Mathématiques et Informatique

Filière : Mathématiques

Spécialité : Mathématiques Fondamentales et Appliquées

Présenté par : Saadi Zoubida

THÈME

La stabilité au sens de Mittag-Leffler en E.D.F

Devant le jury composé de :

M.	BENHAMIDOUCHE	Professeur	U. M'sila	Président
Melle.	MADJIDI Fadila	Maître de conférences	U. M'sila	Directrice de mémoire
M.	SAADI Abderachid	Maître de conférences	U. M'sila	Examineur

Année Universitaire : 2017/2018

Table des matières

Introduction	1
1 Préliminaires	3
1.1 Fonctions Spéciales	3
1.1.1 Fonction Gamma	3
1.1.2 Fonction Bêta	6
1.1.3 Fonction de Mittag-Leffler	8
1.2 Integrales et dérivées fractionnaires	9
1.2.1 Intégrales Fractionnaires au sens de Riemann-Liouville	9
1.2.2 Dérivées fractionnaires au sens de Riemann-Liouville	13
1.2.3 Dérivées fractionnaires au sens de Caputo	14
2 Extension de stabilité au sens de Lyapunov au cas fractionnaire et stabilité au sens de Mittag-Leffler	16
2.1 Notions de base	16
2.1.1 Le point d'équilibre	16
2.1.2 Le point d'équilibre dans le cas fractionnaire	16
2.1.3 Stabilité	17
2.1.4 Stabilité asymptotique	17
2.1.5 Stabilité uniforme	17
2.1.6 Stabilité asymptotique uniforme	17
2.1.7 Stabilité exponentielle	18
2.2 Stabilité au sens de Lyapunov : méthode directe	18

2.3	Stabilité au sens de Mittag-Leffler	20
2.4	La relation entre la stabilité de Lyapunov et la stabilité de Mittag-Leffler . .	21
	Bibliographie	25

Introduction

Certaines méthodes visant à stabiliser les systèmes non linéaires sont basées sur l'utilisation de la linéarisation statique ou dynamique. Elles peuvent conduire à des résultats plus ou moins satisfaisants du point de vue pratique.

Cependant, ceux-ci ne s'adressent qu'à une classe relativement restreinte de systèmes physiques : ceux régis par des équations différentielles ordinaires non linéaires possédant certaines propriétés.

L'objectif de ce memoire est dans un premier temps de présenter sommairement la théorie de la stabilité des équations différentielles. Le problème qui nous intéresse ici est celui des systèmes non linéaires. Les premiers résultats sont apparus avec Lyapunov à la fin du 19^{ème} siècle et au début du 20^{ème} siècle. Il donne alors une condition suffisante pour la stabilité des systèmes non linéaires.

Dans un second temps, nous nous intéresserons à la stabilité en temps fini. Cette stabilité, qui n'est qu'une extension de la stabilité asymptotique, est cependant très importante du point de vue pratique et industriel, car elle permet de dire au bout de combien de temps le système est stable.

Les premiers travaux sur la stabilité ne retenaient des équations différentielles ordinaires (EDO) que leur approximation linéaire du premier ordre. Il a fallu attendre quelques années pour que H. Poincaré et A.M. Lyapunov justifient et étendent les propriétés locales déduites du modèle linéarisé. L'un des résultats principaux est la première méthode de Lyapunov :

si l'origine est asymptotiquement stable pour le linéarisé alors il est localement asymptotiquement stable pour le système non linéaire. Cependant elle ne donne aucun renseignement quantitatif sur le domaine de stabilité asymptotique, les fonctions de Lyapunov sont analogues à des distances entre l'état du système le long de sa trajectoire et l'ensemble où la trajectoire est étudié. D'autre part, ces fonctions ont une relation directe avec la physique des systèmes, puisque très souvent elles ne sont rien de plus que l'expression de l'énergie totale du système.

La stabilité de lyapunov est un outil important pour la stabilité des systèmes non-linéaire, la méthode directe de lyapunov consiste a trouver une fonction dite fonction de lyapunov pour un système non-linéaire donné, si une telle fonction existe, alors le système est stable .Notons que cette méthode de lyapunov est une condition suffisante, ce qui signifie que dans le cas ou on n'arrive pas à trouver cette fonction de lyapunov pour conclure la stabilité de système, le système peut rester stable et on ne peut pas confirmer qu'il n'est pas stable.

Dans ce travail, on généralise la notion de stabilité de lyapunov en considérant des opérateurs d'ordre fractionnaire, c'est à dire, le système dynamique non- linéaire peut *être* défini en temps fractionnaire.

Ce memoire est organisé comme suit :

Le premier chapitre sera consacré aux éléments de base du calcul fractionnaire, quelques concepts préliminaires seront introduits comme la fonction Gamma, la fonction *Bêta* et la fonction de Mittag-Leffler qui joue un rôle important dans la théorie des équations différentielles fractionnaires. En suite les intégrales fractionnaires au sens de Riemann-Liouville et dérivées fractionnaires au sens de Riemann-Liouville et dérivées fractionnaires au sens de Caputo.

Le deuxième chapitre de ce memoire est dédié aux stabilité au sens de lyapunov, et Mittag-Leffler, et la relation entre ces deux notions de stabilité.

Chapitre 1

Préliminaires

1.1 Fonctions Spéciales

1.1.1 Fonction Gamma

L'un des outils de base du calcul fractionnaire est la fonction Gamma qui prolonge naturellement la factorielle aux nombres réels positifs (et même aux nombres complexe à parties réelles positives)

Définition 1.1.1. [3] *l'une des fonction de Base de calcul fractionnaire est la fonction Gamma d'Euler définie par :*

$$\Gamma(z) = \int_0^{+\infty} t^{z-1} e^{-t} dt \text{ ou } z \in \mathbb{C} \text{ et } \operatorname{Re}(z) > 0. \quad (1.1)$$

Propriétés 1.1.1. [3] *Nous avons les propriétés suivantes :*

1. $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$.
2. $\Gamma(1) = 1$ et $\Gamma(-m) = \pm\infty$ pour tout $m \in \mathbb{N}$.
3. $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$ et $\Gamma(n + \frac{1}{2}) = \frac{2n!\sqrt{\pi}}{4^n n!}$.
4. Si $n \in \mathbb{N}$, on a : $\Gamma(n+1) = n!$.

Démonstration. 1. D'après l'intégrale par partie, nous avons :

$$\begin{aligned}
 \Gamma(z+1) &= \int_0^{\infty} t^z e^{-t} dt \\
 &= [t^{z-1} e^{-t}]_0^{\infty} + z \int_0^{\infty} t^{z-1} e^{-t} dt \\
 &= z \int_0^{\infty} t^{z-1} e^{-t} dt \\
 &= z\Gamma(z)
 \end{aligned}$$

2. Nous avons :

$$\begin{aligned}
 \Gamma(1) &= \int_0^{+\infty} e^{-t} dt \\
 &= [e^{-t}]_0^{+\infty} \\
 &= 1
 \end{aligned}$$

et

$$\Gamma(z) = \frac{\Gamma(z+1)}{z}$$

donc

$$|\lim_{\operatorname{Re}(z) \rightarrow -m} \Gamma(z)| = +\infty.$$

3. 1- Avec le changement de variable $s = \sqrt{t}$, on obtient :

$$\begin{aligned}
 \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) &= \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}} dt \\
 &= 2 \int_0^{+\infty} e^{-s^2} ds \\
 &= 2\left(\frac{\sqrt{\pi}}{2}\right) \text{ (d'après l'intégrale de gauss)} \\
 &= \sqrt{\pi}.
 \end{aligned}$$

2 -Nous allons démontrer la formule $\Gamma(n + \frac{1}{2}) = \frac{2n! \sqrt{\pi}}{4^n n!}$, par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$.

- Pour $n = 0$, on a $\Gamma(0 + \frac{1}{2}) = \frac{0! \sqrt{\pi}}{4^0 0!} = \sqrt{\pi}$.

- Supposons que la formule est vérifiée pour $(n - 1)$ et considérons n . C-à-d que supposons que $\Gamma((n - 1) + \frac{1}{2}) = \frac{2(n-1)! \sqrt{\pi}}{4^{n-1} (n-1)!}$, est vérifié. Alors

$$\begin{aligned}
 \Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right) &= \Gamma\left(\left(n - \frac{1}{2}\right) + 1\right) \\
 &= \left(n - \frac{1}{2}\right) \Gamma\left(n - \frac{1}{2}\right) \\
 &= \left(n - \frac{1}{2}\right) \Gamma\left((n - 1) + \frac{1}{2}\right) \\
 &= \left(n - \frac{1}{2}\right) \frac{2(n-1)! \sqrt{\pi}}{4^{n-1} (n-1)!} \\
 &= \left(\frac{2n-1}{2}\right) \frac{(2n-2)! \sqrt{\pi}}{4^{n-1} (n-1)!} \\
 &= \frac{2n}{2n} \frac{(2n-1)}{2} \frac{(2n-2)! \sqrt{\pi}}{4^{n-1} (n-1)!} \\
 &= \frac{(2n)! \sqrt{\pi}}{4^n (n)!}.
 \end{aligned}$$

Donc la formule est vérifiée pour n .

4. Nous avons $\Gamma(1) = 0! = 1$ et avec la propriété $\Gamma(z + 1) = z\Gamma(z)$, on obtient :

$$\Gamma(2) = 1\Gamma(1) = 1!.$$

$$\Gamma(3) = 2\Gamma(2) = 2!.$$

Pour n^{ieme} itération, on a :

$$\Gamma(n+1) = n!.$$

□

1.1.2 Fonction Bêta

Définition 1.1.2. [3] Soient, $x, y > 0$, la fonction Bêta est la fonction définie par :

$$B(x, y) = \int_0^1 t^{x-1} (1-t)^{y-1} dt \quad (1.2)$$

Proposition 1.1.1. [3] la fonction Bêta est reliée aux fonction Gamma par la relation suivant :

$$\forall x, y > 0, \text{ on a : } B(x, y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)} \quad (1.3)$$

Démonstration.

$$\begin{aligned} \Gamma(x)\Gamma(y) &= \int_0^\infty \int_0^\infty t_1^{x-1} t_2^{y-1} e^{-t_1} e^{-t_2} dt_1 dt_2 \\ &= \int_0^\infty t_1^{x-1} dt_1 \int_0^\infty t_2^{y-1} e^{-|t_1+t_2|} dt_2 \end{aligned}$$

En effectuant le changement de variable

$t'_1 = t_1 + t_2$, et puis on pose : $t'_2 = \frac{t_1}{t'_1}$ le domaine S correspondante à S' dans les coordonnes t'_1, t'_2 .

$$S' = ((t'_1, t'_2), t'_1 > 0, 0 \leq t'_2 \leq 1).$$

$$dt'_1 = dt_1 + dt_2, dt_1 = t'_2 dt'_1 + t'_1 dt'_2$$

$$dt_2 = (1 - t'_2)dt'_1 - t'_1 dt'_2$$

Donc

$$dt_1 dt_2 = t'_1 dt'_1 dt'_2.$$

il s'en suit :

$$\begin{aligned} \Gamma(x)\Gamma(y) &= \int_0^\infty e^{-t'_1} dt'_1 \int_0^1 (t'_1 t_2)^{x-1} (t'_1 - t'_1 t'_2)^{y-1} t'_1 dt'_2 \\ &= \int_0^\infty e^{-t'_1} dt'_1 (t'_1)^{(x+y-1)} B(x, y) \\ &= \int_0^\infty e^{-t'_1} (t'_1)^{(x+y-1)} dt'_1 B(x, y) \\ &= \Gamma(x+y) B(x, y). \end{aligned}$$

□

Proposition 1.1.2.

1. $B(x, y) = B(y, x)$. (*symétrique*)
2. $B(x, 1) = \frac{1}{x}$.

Démonstration. 1. Nous avons :

$$B(x, y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)} = \frac{\Gamma(y)\Gamma(x)}{\Gamma(y+x)} = B(y, x).$$

2. Nous avons :

$$B(x, 1) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(1)}{\Gamma(x+1)} = \frac{\Gamma(x)}{x\Gamma(x)} = \frac{1}{x}.$$

□

1.1.3 Fonction de Mittag-Leffler

Définition 1.1.3. [1] pour $z \in \mathbb{C}$, la fonction de Mittag-Leffler $E_{(\alpha)}(z)$ (notée par M-L) et définie comme suit :

$$E_{(\alpha)}(z) = \sum_{\kappa=0}^{\infty} \frac{z^{(\kappa)}}{\Gamma(\alpha\kappa + 1)}, (\alpha > 0). \quad (1.4)$$

et la fonction de Mittag-Leffler généralisée $E_{(\alpha,\beta)}(z)$ est définie comme suit :

$$E_{(\alpha,\beta)}(z) = \sum_{\kappa=0}^{\infty} \frac{z^{(\kappa)}}{\Gamma(\alpha\kappa + \beta)}, (\alpha > 0, \beta > 0) \quad (1.5)$$

Exemple 1.1.1. pour des valeurs spéciales de α et β on a :

$$1. \quad E_1(z) = E_{1,1}(z) = e^z.$$

$$2. \quad E_{1,2}(z) = \frac{e^z - 1}{z}.$$

on obtient

$$\begin{aligned} E_{1,2}(z) &= \sum_{\kappa=0}^{\infty} \frac{z^{(\kappa)}}{\Gamma(\kappa + 2)} \\ &= \sum_{\kappa=0}^{\infty} \frac{z^{(\kappa)}}{(\kappa + 1)!} \\ &= \frac{1}{z} \sum_{\kappa=0}^{\infty} \frac{z^{(\kappa+1)}}{(\kappa + 1)!} \\ &= \frac{1}{z} (e^z - 1). \end{aligned}$$

Théorème 1.1.1. la fonction de Mittag-Leffler possède des propriétés suivantes :

1. Pour $|z| < 1$ la fonction de Mittag – Leffler généralise satisfait :

$$\int_0^{+\infty} e^{-t} t^{\beta-1} E_{(\alpha,\beta)}(zt_{(\alpha)}) dt = \frac{1}{z - 1}. \quad (1.6)$$

2. Inégration de la fonction de Mittag – Leffler :

$$\int_0^z E_{(\alpha,\beta)}(\lambda t_{(\alpha)}) t^{\beta-1} dt = z^{\beta} E_{(\alpha,\beta+1)}(\lambda z^{\alpha}). \quad (1.7)$$

3. La dérivée d'ordre n de la fonction de Mittag – Leffler est donnée par :

$$\frac{d^n}{dz^n} (z^{\beta-1} E_{\alpha,\beta}(\lambda z^{\alpha})) = z^{\beta-n-1} E_{\alpha,\beta-n}(\lambda z^{\alpha}). \quad (1.8)$$

Démonstration. voir [1]

□

1.2 Integrales et dérivées fractionnaires

1.2.1 Intégrales Fractionnaires au sens de Riemann-Liouville

Définition 1.2.1. [1] Soit $\Omega = [a, b]$ un intervalle fini sur \mathbb{R} et soit $f \in L^1([a, b])$. La notation d'intégrale fractionnaire d'ordre n , selon l'approche de Riemann-Liouville, généralise formule d'intégrale répété n fois :

$$I_{a+}^1 f(x) = \int_a^x f(t) dt.$$

$$\begin{aligned} I_{a+}^2 f(x) &= I_{a+}^1 (I_{a+}^1 f(x)) \\ &= \int_a^x I_{a+}^1 f(t) dt \\ &= \int_a^x \int_a^t f(s) ds dt. \end{aligned}$$

D'après l'intégrale par partie, nous avons :

$$\begin{aligned} I_{a+}^2 f(x) &= \left[t \int_a^t f(s) ds \right]_a^x - \int_a^x t f(t) dt \\ &= x \int_a^x f(t) dt - \int_a^x t f(t) dt \\ &= \int_a^x (x - t) f(t) dt. \end{aligned}$$

Donc, pour n^{ieme} itération, on obtient :

$$I_{a+}^n f(x) = \frac{1}{(n-1)!} \int_a^x \frac{1}{(x-t)^{1-n}} f(t) dt.$$

Cette formule est appelée formule de cauchy, et d'après la propriété de Gamma

$\Gamma(n) = (n-1)!$, nous avons :

$$I_{a+}^n f(x) = \frac{1}{\Gamma(n)} \int_a^x \frac{1}{(x-t)^{1-n}} f(t) dt.$$

Définition 1.2.2. Soit $\Omega = [a, b]$ un intervalle fini sur \mathbb{R} et soit $f \in L^1([a, b])$.

Les intégrales fractionnaires à gauche définie par :

$$I_{a+}^{\alpha} f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x \frac{f(t)}{(x-t)^{1-\alpha}} dt, \quad x > a, \quad \operatorname{Re}(\alpha) > 0. \quad (1.9)$$

Les intégrales fractionnaires à droite définie par :

$$I_{b-}^{\alpha} f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_x^b \frac{f(t)}{(t-x)^{1-\alpha}} dt, \quad x < b, \quad \operatorname{Re}(\alpha) > 0. \quad (1.10)$$

Propriétés 1.2.1. Soient $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ avec $\operatorname{Re}(\alpha), \operatorname{Re}(\beta) > 0$ et $a, b \in \mathbb{R}$. Nous avons :

1. $I_{a+}^{\alpha} (x-a)^{\beta-1} = \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\beta+\alpha)} (x-a)^{\beta+\alpha-1}$.
2. $I_{b-}^{\alpha} (b-x)^{\beta-1} = \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\beta+\alpha)} (b-x)^{\beta+\alpha-1}$.

Démonstration.

1. On pose $f(x) = (x-a)^{\beta-1}$. Nous avons :

$$I_{a+}^{\alpha} f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x-t)^{\alpha-1} (t-a)^{\beta-1} dt.$$

Avec le changement de variable $t=a+s(x-a)$, nous avons :

$$\begin{cases} t = a \iff s = 0, \\ t = x \iff s = 1, \\ dt = (x-a)ds. \end{cases}$$

Donc, avec la définition de la fonction Bêta, on obtient :

$$I_{a+}^{\alpha} f(x) = \frac{(x-a)^{\beta+\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 s^{\beta-1} (1-s)^{\alpha-1} ds = \frac{B(\beta, \alpha)}{\Gamma(\alpha)} (x-a)^{\beta+\alpha-1}.$$

en utilisant la relation entre la fonction Gamma et la fonction Bêta, on obtient :

$$I_{a+}^{\alpha} f(x) = \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\beta+\alpha)} (x-a)^{\beta+\alpha-1}.$$

2. On pose $g(x) = (b-x)^{\beta-1}$. Nous avons :

$$I_{b-}^{\alpha} g(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_x^b (t-x)^{\alpha-1} (b-t)^{\beta-1} dt$$

Avec le changement de variable $t=b+s(b-x)$, nous avons :

$$\begin{cases} t = b \iff s = 0, \\ t = x \iff s = 1, \\ dt = -(b-x)ds. \end{cases}$$

Donc, avec la définition de la fonction Bêta, on obtient :

$$I_{b-}^{\alpha} g(x) = \frac{(b-x)^{\beta+\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 s^{\beta-1} (1-s)^{\alpha-1} ds = \frac{B(\beta, \alpha)}{\Gamma(\alpha)} (b-x)^{\beta+\alpha-1}.$$

en utilisant la relation entre la fonction Gamma et la fonction Bêta, on obtient :

$$I_{b-}^{\alpha} g(x) = \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\beta+\alpha)} (b-x)^{\beta+\alpha-1}.$$

□

Proposition 1.2.1. Soient $f \in C([a, b])$ et $\alpha > 0$ et $\beta > 0$. Les intégrales fractionnaires de Riemann-Liouville (1.9) et (1.10) possède les propriétés suivantes :

1. $I_{a+}^{\alpha} [I_{a+}^{\beta} f(x)] = I_{a+}^{\alpha+\beta} f(x).$
2. $I_{b-}^{\alpha} [I_{b-}^{\beta} f(x)] = I_{b-}^{\alpha+\beta} f(x).$

Démonstration.

1. Nous avons :

$$\begin{aligned} I_{a+}^{\alpha} [I_{a+}^{\beta} f(x)] &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x \frac{I_{a+}^{\beta} f(t)}{(x-t)^{1-\alpha}} dt \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_a^x \left[\int_a^t \frac{f(\tau)}{(x-\tau)^{1-\alpha}(t-\tau)^{1-\beta}} d\tau \right] dt \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_a^x \left[\int_a^x \frac{f(\tau)}{(x-\tau)^{1-\alpha}(t-\tau)^{1-\beta}} d\tau \right] dt \quad (\text{d'après théorème de Fubini}). \end{aligned}$$

En utilisant le changement de variable $t = \tau + s(x - \tau)$, on obtient $dt = (x - \tau)ds$ et

$$\begin{cases} t = x & \Longleftrightarrow & s = 1, \\ t = a & \Longleftrightarrow & \tau = a \Longleftrightarrow s = 0. \end{cases}$$

Donc, nous avons :

$$\begin{aligned} I_{a+}^{\alpha}[I_{a+}^{\beta}f(x)] &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_a^x \left[\int_0^1 s^{\beta-1}(1-s)^{\alpha-1} ds \right] \frac{f(\tau)}{(x-\tau)^{1-\alpha-\beta}} d\tau \\ &= \frac{B(\alpha, \beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_a^x \frac{f(\tau)}{(x-\tau)^{1-\alpha-\beta}} d\tau \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha + \beta)} \int_a^x \frac{f(\tau)}{(x-\tau)^{1-\alpha-\beta}} d\tau \\ &= I_{a+}^{\alpha+\beta}f(x). \end{aligned}$$

2. Nous avons :

$$\begin{aligned} I_{b-}^{\alpha}[I_{b-}^{\beta}f(x)] &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x \frac{I_{b-}^{\beta}}{(t-x)^{1-\alpha}} f(t) dt \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_x^b \left[\int_t^b \frac{f(\tau)}{(t-x)^{1-\alpha}(\tau-t)^{1-\beta}} d\tau \right] dt \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_t^b \left[\int_x^b \frac{f(\tau)}{(t-x)^{1-\alpha}(\tau-t)^{1-\beta}} d\tau \right] dt \quad (\text{d'après théorème de Fubini}). \end{aligned}$$

En utilisant le changement de variable $t = \tau - s(\tau - x)$, on obtient $dt = -(\tau - x)ds$ et

$$\begin{cases} t = x & \Longleftrightarrow & s = 1, \\ t = b & \Longleftrightarrow & \tau = b \Longleftrightarrow s = 0. \end{cases}$$

Donc, nous avons :

$$\begin{aligned}
 I_{b-}^{\alpha} [I_{b-}^{\beta} f(x)] &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_x^b \left[\int_0^1 s^{\beta-1} (1-s)^{\alpha-1} ds \right] \frac{f(\tau)}{(x-\tau)^{1-\alpha-\beta}} d\tau \\
 &= \frac{B(\alpha, \beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_x^b \frac{f(\tau)}{(\tau-x)^{1-\alpha-\beta}} d\tau \\
 &= \frac{1}{\Gamma(\alpha+\beta)} \int_x^b \frac{f(\tau)}{(\tau-x)^{1-\alpha-\beta}} d\tau \\
 &= I_{b-}^{\alpha+\beta} f(x).
 \end{aligned}$$

□

1.2.2 Dérivées fractionnaires au sens de Riemann-Liouville

Définition 1.2.3. [1] Soit $f \in L^1([a, b])$ une fonction intégrable sur $[a, b]$. Les dérivées fractionnaires au sens de Riemann-Liouville D_{a+}^{α} et D_{b-}^{α} d'ordre $\alpha \in (Re(\alpha))$ sont définies par :

$$D_{a+}^{\alpha} f(x) = \frac{d^n}{dx} (I_{a+}^{n-\alpha} f(x)) \quad (1.11)$$

$$= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \frac{d^n}{dx} \int_a^x \frac{f(t)}{(x-t)^{\alpha-n+1}} dt, \quad n = [Re(\alpha)] + 1, \quad x > a. \quad (1.12)$$

$$D_{b-}^{\alpha} f(x) = \frac{-d^n}{dx} (I_{b-}^{n-\alpha} f(x)) \quad (1.13)$$

$$= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \frac{-d^n}{dx} \int_x^b \frac{f(t)}{(t-x)^{\alpha-n+1}} dt, \quad n = [Re(\alpha)] + 1, \quad x < b. \quad (1.14)$$

respectivement, où $[Re(\alpha)]$ est la partie entière de $Re(\alpha)$.

Proposition 1.2.2. voir [1], Soient, $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ avec $Re(\alpha), Re(\beta) > 0$ et $a, b \in \mathbb{R}$. Nous avons :

1. $D_{a+}^{\alpha} (x-a)^{\beta-1} = \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\beta-\alpha)} (x-a)^{\beta-\alpha-1}$.
2. $D_{b-}^{\alpha} (b-x)^{\beta-1} = \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\beta-\alpha)} (b-x)^{\beta-\alpha-1}$.

Remarque 1.2.1.

1. Si $\beta = 1$ et $0 < \operatorname{Re}(\alpha) < 1$, alors la dérivée au sens de de Riemann–Liouville d'une fonction con

$$D_{a+}^{\alpha} 1 = \frac{(x-a)^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)} \quad \text{et} \quad D_{b-}^{\alpha} 1 = \frac{(b-x)^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)}.$$

2. Pour tout $j = 1, 2, \dots, [\operatorname{Re}(\alpha)] + 1$ avec $\operatorname{Re}(\alpha) \geq 0$, nous avons :

$$D_{a+}^{\alpha} (x-a)^{\alpha-j} = D_{b-}^{\alpha} (b-x)^{\alpha-j} = 0.$$

1.2.3 Dérivées fractionnaires au sens de Caputo

Définition 1.2.4. [3] La dérivée fractionnaire de Caputo d'ordre $\alpha \in \mathbb{R}_+$ d'une fonction f est donnée par :

$${}^c D_a^{\alpha} f(x) = I_a^{n-\alpha} f^n(x) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^x (x-t)^{n-\alpha-1} f^n(t) dt, \quad (x > a, \quad n-1 \leq \alpha \leq n, \quad n \in \mathbb{N}^*). \quad (1.15)$$

Définition 1.2.5. [1]

1. Soit $\alpha > 0$, $n = [\alpha] + 1$. La dérivée fractionnaire de Caputo à gauche d'ordre α de f définie par :

$$\forall t \in [a, b], {}^c D_{a+}^{\alpha} f(t) = I_{a+}^{\alpha} \circ \left[\frac{d}{dt} \right]^n f(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^t (t-s)^{n-\alpha-1} f^n(s) ds.$$

2. Soit $\alpha > 0$, $n = [\alpha] + 1$. La dérivée fractionnaire de Caputo à droite d'ordre α de f définie par :

$$\forall t \in [a, b], {}^c D_{b-}^{\alpha} f(t) = I_{b-}^{\alpha} \circ \left[\frac{-d}{dt} \right]^n f(t) = \frac{(-1)^n}{\Gamma(n-\alpha)} \int_t^b (s-t)^{n-\alpha-1} f^n(s) ds.$$

Théorème 1.2.1. [4]

1. Si $f \in C[a, b]$ et si $\alpha > 0$, $(n-1 < \alpha < n)$, alors :

$${}^c D_a^{\alpha} I_a^{\alpha} f(x) = f(x). \quad (1.16)$$

2. Soient f_1 et f_2 deux fonctions définies sur $[a, b]$, telles que ${}^c D_a^\alpha f_1$ et ${}^c D_a^\alpha f_2$ existent presque partout. De plus soient C_1 et $C_2 \in \mathbb{R}$ alors, ${}^c D_a^\alpha (C_1 f_1 + C_2 f_2)$ existe presque partout sur $[a, b]$, et on a :

$${}^c D_a^\alpha (C_1 f_1 + C_2 f_2) = C_1 {}^c D_a^\alpha f_1 + C_2 {}^c D_a^\alpha f_2. \quad (1.17)$$

Théorème 1.2.2. Soient $\alpha \geq 0$, $n = [\alpha] + 1$, si f possède $(n - 1)$ dérivées en a et si $D_a^\alpha f$ existe, alors :

$${}^c D_a^\alpha f(x) = D_a^\alpha \left[f(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x - a)^k \right].$$

pour presque tout $x \in [a, b]$.

Proposition 1.2.3. [1] Pour $\alpha \geq 0$, $\beta \geq 0$ on a :

$$\begin{aligned} 1. ({}^c D_{a+}^\alpha (t - a)^{\beta-1})(t) &= \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\beta - \alpha)} (t - a)^{\beta - \alpha - 1}, \quad \beta > \alpha. \\ 2. ({}^c D_{b-}^\alpha (t - a)^{\beta-1})(t) &= \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\beta - \alpha)} (b - t)^{\beta - \alpha - 1}, \quad \beta > \alpha. \end{aligned}$$

Lemme 1.2.1. Soit $\alpha \in \mathbb{R}^+ - \mathbb{N}$ et $n = [\alpha] + 1$. Si $f \in C^n([a, b])$, alors :

$$\begin{aligned} 1. \lim_{\alpha \rightarrow n^-} ({}^c D_{a+}^\alpha f(t)) &= f^n(t). \\ 2. \lim_{\alpha \rightarrow n^-} ({}^c D_{b-}^\alpha f(t)) &= (-1)^n f^n(t). \end{aligned}$$

Exemple 1.2.1.

1. la dérivée d'une fonction constante au sens de **Caputo** est nulle : ${}^c D^n C = 0$.
2. la dérivée de $f(x) = (x - a)^\alpha$ au sens de **Caputo** on a :

$$f^n(x) = \frac{\Gamma(\alpha + 1)}{\Gamma(\alpha - n + 1)} (x - a)^{\alpha - n}.$$

Chapitre 2

Extension de stabilité au sens de Lyapunov au cas fractionnaire et stabilité au sens de Mittag-Leffler

2.1 Notions de base

2.1.1 Le point d'équilibre

[2] Soit l'équation différentielle :

$$\dot{y} = f(y) \quad (2.1)$$

Définition 2.1.1. *Le point y^* est dite point d'équilibre du système (2.1) si $f(y^*) = 0$. Autrement dite y^* est une solution constante de l'équation $\dot{y} = f(y)$.*

2.1.2 Le point d'équilibre dans le cas fractionnaire

[2] La constante $x(t_0)$ est un point d'équilibre du système fractionnaire de Riemann-Liouville

$${}_t D_t^\alpha x(t) = f(t, x). \quad (2.2)$$

Si Seulement si

$${}_t D_t^\alpha x_0 = f(t, x_0). \quad (2.3)$$

2.1.3 Stabilité

[2]

Définition 2.1.2. *L'équilibre y^* est dite stable si pour tout $\epsilon > 0$, il existe $\eta > 0$ tel que pour toute solution $y(t)$ de (2.1) on a*

$$\|y(0) - y^*\| < \eta \Rightarrow \forall t \geq 0, \|y(t) - y^*\| < \epsilon.$$

2.1.4 Stabilité asymptotique

[2]

Définition 2.1.3. *L'équilibre y^* est dite asymptotiquement stable s'il est stable, et il existe $r > 0$ tel que pour toute solution $y(t)$ de (2.1) on a*

$$\|y(0) - y^*\| < r \Rightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} \|y(t) - y^*\| = 0.$$

2.1.5 Stabilité uniforme

[2]

Définition 2.1.4. *On dit que le point d'équilibre est uniformément stable si :*

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta(\epsilon) > 0, \|x(t_0)\| < \delta \Rightarrow \|x(t)\| < \epsilon, \forall t \geq t_0 \geq 0.$$

2.1.6 Stabilité asymptotique uniforme

[2]

Définition 2.1.5. *Soit K un compact non vide de U , on dit que K est uniformément asymptotiquement stable pour le système dynamique si :*

1. *K est uniformément stable pour le système (2.1).*
2. *$\exists \delta > 0; \forall \epsilon > 0; \exists T(\epsilon) > 0; (x_0 \in B_\delta(K)) \implies (x(t, t_0, x_0) \in B_\epsilon(K)); \forall t \geq t_0 + T(\epsilon).$*

2.1.7 Stabilité exponentielle

Définition 2.1.6. *On dit que l'origine $x = 0$ est un point d'équilibre exponentiellement stable, s'il existe un voisinage de l'origine noté $U(0)$, $\exists \lambda_1 > 0$ et $\exists \lambda_2 > 0$ tels que*

$$\|x(t)\| \leq \lambda_1 e^{-\lambda_2(t-t_0)}, \quad \forall x_0 \in U(0), \quad \forall t \geq t_0 \geq 0.$$

Dans ce cas la constante λ_2 est appelée le taux ou aussi la vitesse de convergence.

L'origine $x = 0$ est un point d'équilibre globalement exponentiellement stable si $U(0) = \mathbb{R}^n$.

Remarque 2.1.1. *Il est important de remarquer que la propriété de la stabilité exponentielle du système entraîne nécessairement la stabilité asymptotique de ce dernier.*

2.2 Stabilité au sens de Lyapunov : méthode directe

[7] Stabilité au sens de Lyapunov : méthode directe

Par méthode directe de Lyapounov nous faisons allusion à la méthode consistant à trouver une fonction de Lyapounov associée à un problème non-linéaire, si une telle fonction existe alors le système est stable. Cette méthode est difficile à mettre en oeuvre, mais elle est d'une portée beaucoup plus générale. Notons que la méthode directe de Lyapounov nous donne une condition suffisante de stabilité, c'est-à-dire que le système peut être stable même devant l'impossibilité de trouver une fonction de Lyapounov car il n'y a pas de règle générale pour trouver une telle fonction, cependant, dans les problèmes de mécanique, l'énergie est souvent un bon candidat.

Définition 2.2.1. *Soit Ω un ouvert de \mathbb{R}^n contenant 0, et soit $V : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe C^1 .*

1. *V est dite définie positive si :*

(i) $V(0) = 0$.

(ii) $V(u) > 0$ pour $u \in \Omega \setminus \{0\}$.

2. *V est dite définie négative, si $-V$ est définie positive.*

3. V est dite semi définie positive si :

(i) $V(0) = 0$.

(ii) $V(u) \geq 0$ pour $u \in \Omega$.

4. V est dite semi définie négative si $-V$ semi définie positive.

Considérons la classe des systèmes non linéaires décrits par l'équation dynamique

$$\dot{x} = f(x, t), \quad x(t_0) = 0 \quad (2.4)$$

Définition 2.2.2. [7] (Fonction de Lyapunov) : Une fonction $V(x, t)$ de classe C^1 est une fonction de Lyapunov locale (respectivement globale) pour le système (2.4) si elle est propre définie positive et s'il existe un voisinage de l'origine v_0 tel que $x \in v_0$ (respectivement $x \in \mathbb{R}^n$).

$$\dot{V}(x, t) = \frac{dV}{dt}(x, t) + \frac{dV}{dx}(x, t)f(x(t)) \leq 0.$$

Si $\dot{V}(x, t) \leq 0$, alors $V(x, t)$ est appelée fonction de Lyapunov au sens strict pour (2.4).

Théorème 2.2.1. Soit $y(t)$ solution de $\dot{y} = f(y)$, et soit V une fonction de classe C^1 définie positive sur Ω un voisinage de $y^* = 0$:

(i) si $\frac{dV}{dt}$ est semi définie négative alors y^* est stable

(ii) si $\frac{dV}{dt}$ est définie négative alors y^* est asymptotiquement stable.

(iii) si de plus $D = \mathbb{R}^n$ et

$$\lim_{\|x\| \rightarrow \infty} V(x) = \infty.$$

donc 0 est globalement asymptotiquement stable.

Dans le cas (i) $V(y)$ est dite fonction de Lyapunov faible, et dans le cas (ii) $V(y)$ est dite fonction de Lyapunov stricte.

Démonstration. (ii) $V(x, y)$ Lyapunov stricte dans le cas planaire. Soit $V : \Omega \Rightarrow \mathbb{R}$ tel que Ω contient $(0, 0)$.

Soit le cercle C de centre $(0, 0)$ inclus dans Ω . Sur ce cercle V admet un minimum $V > M$ car $(V(x, y) > 0 \text{ si } (x, y) \neq (0, 0))$. Soit U l'ensemble des points intérieur à C et inférieur à M en V alors U n'est pas vide car $(0, 0) \in U$ et $V(0, 0) = 0 < M$

Soit (x, y) une solution telle que $(x(0), y(0)) \in U$, on a $0 \leq V(x(t), y(t)) \leq M$ On prend

$t = t_n = n$ alors : $V(x(t_n), y(t_n)) = V(x(n), y(n))$ converge car V décroissante le long des solutions et minorée par 0 ,donc

$$V(x(n+1), y(n+1)) - V(x(n), y(n)) \longrightarrow_{n \rightarrow \infty} 0.$$

D'un autre coté on applique le théorème des accroissements finis à V dans $[n, n+1]$ alors $\exists s_n \in]n, n+1[$ tel que :

$$V(x(n+1), y(n+1)) - V(x(n), y(n)) \longrightarrow_{n \rightarrow \infty} 0 = \frac{d}{dt} V(x(s_n), y(s_n)).$$

$(x(s_n), y(s_n))$ se trouve dans un compact donc on peut extraire une sous suite $(x(r_n), y(r_n))$ qui converge.

$$\frac{dV}{dt} \lim_{n \rightarrow +\infty} (x(r_n), y(r_n)) = 0 \Rightarrow \frac{dV}{dt}(x_\infty, y_\infty) = 0, \quad (2.5)$$

de la $(x_\infty, y_\infty) = (0, 0)$ car $V'(x, y) = 0$ alors $(x, y) = (0, 0)$ (Lyapunov stricte).

donc

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} (x(t), y(t)) = (0, 0).$$

□

2.3 Stabilité au sens de Mittag-Leffler

Définition 2.3.1. [7] *l'équation différentielle fractionnaire non-linéaire*

$${}_0D_t^\alpha x(t) = f(t, x) \quad (2.6)$$

où $\alpha \in (0, 1)$, et le symbole D dans (2.6) peut désigner à la fois les opérateurs fractionnaires de Caputo et Riemann-Liouville. Si $x = 0$ est le point d'équilibre du système d'ordre fractionnaire (2.6), et il existe t_1 satisfaisant $x(t_1) = 0$, alors $x(t) = 0$ pour $t \geq t_1$.

est dite stable au sens de Mittag-Leffler si :

$$\|y(t)\| \leq m y(x_0) (x - x_0)^{-\gamma} E_{\alpha, 1}(-\lambda(x - x_0)^\alpha)^b. \quad (2.7)$$

où $0 < \alpha < 1$, $\gamma \in [0, 1 - \alpha]$, $\lambda \geq 0$, $b > 0$, $m(0) = 0$, $m(y) \geq 0$ et $m(y)$ est localement lipschitzienne sur $x \in B \in \mathbb{R}^n$ avec m_0 comme constante de Lipschitz.

Définition 2.3.2. [7] la solution de (2.6) est dite généralisée stable au sens de Mittag-Leffler stable si :

$$||y(t)|| \leq my(x_0)(x - x_0)^{-\gamma} E_{\alpha, 1-\gamma}(-\lambda(x - x_0)^\alpha)^b. \quad (2.8)$$

où x_0 est temps initial , $\alpha \in (0, 1)$, $-\alpha < \gamma \leq 1 - \alpha$, $\lambda \geq 0$, $b > 0$, $m(0) = 0$, $m(y) \geq 0$, et $m(y)$ est localement lipschitzienne sur $x \in B \subset \mathbb{R}^n$ avec m_0 comme constante de Lipschitz.

Remarque 2.3.1. La stabilité de Mittag-Leffler généralisée implique la stabilité asymptotique uniforme implique la stabilité asymptotique.

On va maintenant énoncer un théorème qui est considéré comme une extension de la méthode directe de Lyapounov au cas d'un système d'équations fractionnaires, et qui a pour résultat la stabilité au sens de Mittag-Leffler.

Exemple 2.3.1. Comparer les deux systèmes suivants et la condition initial $x(0)$ pour $0 < v < 1$,

$$\frac{d}{dt}x(t) = vt^{v-1}, \quad (2.9)$$

$${}_0^c D_t^\alpha x(t) = vt^{v-1}, 0 < \alpha < 1. \quad (2.10)$$

la solution de (2.9) et (2.10) sont $t^v + x(0)$ et $\frac{v\Gamma(v)t^{v+\alpha-1}}{\Gamma(v+\alpha)}$, respectivement. Evidemment, le système (2.9) est instable pour $\forall v \in]0, 1[$. Cependant, le système dynamique partiel (2.10) est stable lorsque $0 < v \leq 1 - \alpha$, ce qui implique que le système d'ordre fractionnaire (2.10) peut avoir des propriétés plus attractives que le système (2.9).

2.4 La relation entre la stabilité de Lyapunov et la stabilité de Mittag-Leffler

[7] En utilisant la méthode directe de Lyapunov, nous pouvons obtenir la stabilité asymptotique des systèmes correspondants, nous étendons la méthode directe de Lyapunov au cas des systèmes fractionnaires, ce qui conduit à la stabilité de Mittag-Leffler.

Théorème 2.4.1. Soit $y = 0$ un point d'équilibre du système (2.1) et $\mathbb{D} \subset \mathbb{R}^n$ un domaine contenant l'origine. Soit $V(x, y(x)) : [0, \infty) * \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continument dérivable et

localement lipschitzienne par rapport à y telle que

$$\alpha_1 \|y(x)\|^a \leq V(x, y(x)) \leq \alpha_2 \|y(x)\|^{ab} \quad (2.11)$$

$$D^\beta V(x, y(x)) \leq \alpha_3 \|y(x)\|^{ab} \quad (2.12)$$

où $x \geq 0$, $y \in \mathbb{D}$, $\beta \in (0, 1)$, α_1 , α_2 , α_3 , a et b sont des constantes positives. Alors $y = 0$ est Mittag-Leffler stable. Si les hypothèses sont vérifiées sur \mathbb{R}^n , alors $y = 0$ est globalement Mittag-Leffler stable.

Démonstration. [7]

Il résulte des équations $-(2.11)$ et (2.12) que

$${}_0^c D_t^\beta V(t, x(t)) \leq -\frac{\alpha_3}{\alpha_2} V(t, x(t)).$$

Il existe une fonction non-négative $M(t)$ satisfaisant

$${}_0^c D_t^\beta V(t, x(t)) + M(t) = -\frac{\alpha_3}{\alpha_2} V(t, x(t)). \quad (2.13)$$

Prenant la transformée de Laplace de (2.13) donne

$$s^\beta V(s) - V(0)s^{\beta-1} + M(s) = -\frac{\alpha_3}{\alpha_2} V(s), \quad (2.14)$$

où la constante non négative $V(0) = V(0, x(0))$ et $V(s) = \mathcal{L}$. Il s'ensuit que

$$V(s) = \frac{V(0)s^{\beta-1} - M(s)}{s^\beta + \frac{\alpha_3}{\alpha_2}}.$$

- Si $x(0) = 0$, à savoir $V(0) = 0$, la solution à (2.6) est $x = 0$.
- Si $x(0) \neq 0$, $V(0) > 0$. Parce que $V(t, x)$ est localement Lipschitzienne par rapport à x , la transformée de Laplace inverse que la solution unique de (2.13) est

$$V(t) = V(0)E_\beta \left(-\frac{\alpha_3}{\alpha_2} t^\beta \right) - M(t) * \left[t^{\beta-1} E_{\beta, \beta} \left(-\frac{\alpha_3}{\alpha_2} t^\beta \right) \right]$$

Depuis les deux $t^{\beta-1}$ et $E_{\beta, \beta} \left(-\frac{\alpha_3}{\alpha_2} t^\beta \right)$ sont des fonctions non négatives, il s'ensuit que

$$V(t) \leq V(0)E_\beta \left(-\frac{\alpha_3}{\alpha_2} t^\beta \right). \quad (2.15)$$

Substitution (2.15) en (2.11) rendements

$$\|x(t)\| \leq \left[\frac{V(0)}{\alpha_1} E_\beta \left(-\frac{\alpha_3}{\alpha_2} t^\beta \right) \right]^{\frac{1}{a}}$$

Où $\frac{V(0)}{\alpha_1} > 0$ pour $x(0) \neq 0$.

Soit $m = \frac{V}{\alpha_1} = \frac{V(0, x(0))}{\alpha_1} \geq 1$, ensuite nous avons :

$$\|x(t)\| \leq \left[m E_\beta \left(-\frac{\alpha_3}{\alpha_2} t^\beta \right) \right]^{\frac{1}{a}}$$

où $m = 0$ si et seulement si $x(0) = 0$. Parce que $V(t, x)$ est localement Lipschitz par rapport à x et $V(0, x(0)) = 0$ si et seulement si $x(0) = 0$, il s'ensuit que $m = \frac{V(0, x(0))}{\alpha_1}$ est également Lipschitzienne par rapport à $x(0)$ et $m(0) = 0$, ce qui implique la stabilité du système de Mittag-Leffler (2.6).

□

Conclusion

Récemment, le calcul fractionnaire a été introduit dans l'analyse de stabilité de systèmes non linéaires, par exemple ([5])([?]). Les méthodes de stabilisation des systèmes d'ordre entier ont été utilisées dans ces travaux. Motivé par l'application du calcul fractionnaire dans le cas non linéaire, nous proposons la stabilité de Mittag-Leffler (généralisée) dans l'espoir d'enrichir la connaissance de la théorie des systèmes et du calcul fractionnaire. au fait que le calcul devient plus vite et la mémoire devient moins chère rend l'application du calcul fractionnaire dans la réalité possible et abordable ([6]).

Bibliographie

- [1] A. A. Kilbas, H.M. Srivastava, and J.J. Trujillo. Theory and Applications of Fractional differential Equation. Elsevier, 2006.
- [2] E .Moulay, Stabilité des équations différentielles ordinaires, Cours de Master.
- [3] I. Podlubny. Fractional differential equations. Academic Press, 1999.
- [4] S.G. Samko, A.A. Kilbas, and O.I. Marichev. Fractional Integrals and Derivatives : Theory and Applications. Gordon and Breach Science Publishers, 1993.
- [5] Shaher Momani, Samir Hadid, Lyapunov stability solutions of fractional integrodifferential equations, International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences 47 (2004) 2503 ?2507
- [6] YangQuan Chen, Ubiquitous fractional order controls : Proceedings of the Second IFAC Workshop on Fractional Differentiation and Its Applications, Porto, Portugal, 2006.
- [7] Yan Li, YangQuan Chen, Igor Podlubny, Stability of fractional-order nonlinear dynamic systems : Lyapunov direct method and generalized Mittag-Leffler stability, Computers and Mathematics with Applications 59 (2010) 1810-1821.